מועד א', סמסטר חורף תשע"ט - אלגברה 1/מ, 104016
7.2.19

ת"ז : | | | | | | | | | | פקולטה : | |

- משך המבחן : 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רישמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **בשאלות 1-3** יש **לנמק** היטב כל תשובה. **תשובה לא מנומקת לא תחשב**.
בשאלות 4-8 יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שבעמוד זה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון. אם תסומן יותר מתשובה אחת השאלה תיפסל.
- **אין לתת נימוקים בשאלות 4-8.**
- שאלת ש"ב (המהווה גם 5% מגן) היא 3-א'.
- סה"כ ניתן לצבור במבחן 101 נקודות אבל הציון הסופי לא יעלה על 100.

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 4-8

	שאלה 4	שאלה 5	שאלה 6	שאלה 7	שאלה 8
א.					
ב.					
ג.					
ד.					
ה.					

<u>שאלה מס' 1</u> : (25 נקודות)

יהי $\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר 2, ותהי $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י :

$$T(a+bx+cx^2)=(a+c)+(a-b)x+(b+c)x^2$$

א. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ב. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לתמונה של T.

ג. (5 נק') הוכיחו כי $\mathbb{R}_2[x]=KerT\oplus \operatorname{Im}T$.

ד. (5 נק') הוכיחו כי $KerT^2=KerT$ וגם $\operatorname{Im}T^2=\operatorname{Im}T$.

ה. (5 נק') הוכיחו שקיימת העתקה ליניארית $S:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^2$ כך ש $KerS=\operatorname{Im}T$.

<u>שאלה מס' 2</u> : (20 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ המטריצה הבאה :

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

א. (5 נק') מצאו את הפולינום האופייני של A, את הערכים העצמיים ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ב. (6 נק') הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP=D$.

ג. (5 נק') האם קיימים סקלרים $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{R}$ כך שהמטריצה A דומה למטריצה $B=\begin{pmatrix}1 & \gamma & 7\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}$? אם כן, מצאו את הסקלרים. אם לא, הסבירו מדוע הם לא קיימים.

ד. (4 נק') הוכיחו כי A הפיכה וחשבו את $tr\left((A^{-1})^2\right)$.

בשאלה זו יש לתת פתרון מלא ובסוף לרכז את התשובות במשבצות המתאימות בסוף השאלה.

א. פולינום אופייני:

ע"ע	ר"א	ר"ג

ב. A לכסינה כי:

D= P=

ג.

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ לא קיימים כי:

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ קיימים ושווים ל:

ד. $tr\left((A^{-1})^2\right) =$

<u>שאלה מס' 3</u> : (31 נקודות) **סעיף א' בשאלה זו מהווה שאלת ש"ב.**

בשאלה זו 4 סעיפים. הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית :

א. (10 נק') אם $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ לא הפיכה אז קיימת $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ שונה מ- 0 כך ש $A \cdot B = 0$

ב. (7 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ויהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי המקיים $T^2 = T$. אם קיים $v \in V$ המקיים $T(v) \neq v$ אז T לא חח"ע.

ג. (7 נק') אם $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ ומקיימת $A^3 + 4A = 0$, אזי A לא הפיכה.

ד. (7 נק') אם $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ בעלות n וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית משותפים אזי $AB = BA$.

<u>יש לסמן את התשובה הנכונה לשאלות 4-8 בטבלה שבדף הראשון. נימוקים לא יבדקו.</u>
<u>יותר מסימון אחד יגרור ניקוד 0 על השאלה.</u>

<u>שאלה מס' 4</u> : (5 נקודות)

נתונה המשואה $z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z=0$ אזי:

א. למשוואה אין שורשים ממשיים פרט ל- $z_0=0$.

ב. $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ הוא לא שורש של המשוואה.

ג. סכום של שורשי המשוואה הוא 1.

ד. סכום כל השורשים הלא ממשיים של המשוואה הוא 0.

ה. למשוואה יש שורש מריבוי 2.

<u>שאלה מס' 5</u> : (5 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ויהיו $U_1,U_2,U_3\in V$ תת מרחבים של V , כך ש: $V=U_1+U_2$ וגם $V=U_1+U_3$. אזי:

א. אם $U_2\subseteq U_1$ אז גם $U_3\subseteq U_1$.

ב. $U_2=U_3$.

ג. $U_2\cup U_3$ הוא תת מרחב של V.

ד. אם $U_2=U_3$ אז $U_1\cap U_2=\{0\}$.

ה. $\dim U_3=\dim U_2$.

<u>שאלה מס' 6</u> : (5 נקודות)

יהי B הבסיס הסדור הבא של $\mathbb{R}^3$: $B=\{(1,0,-1)\ ,\ (1,-1,0)\ ,\ (1,1,1)\}$, ויהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ אופרטור לינארי המקיים:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1 & -a & a\\ -1 & a & a+2\\ 1 & 2a+3 & -3a-4\end{pmatrix}\quad ,\quad a\in\mathbb{R}.$$

נתון כי $\dim(KerT)=2$ אזי:

א. $a=1$ וגם $T(3,0,0)=(1,1,1)$.

ב. $a=1$ וגם $T(3,0,0)=(3,-3,3)$.

ג. $a=-1$ וגם $T(3,0,0)=(1,-1,1)$.

ד. $a=-1$ וגם $T(3,0,0)=(3,6,0)$.

ה. $a=-1$ וגם $T(3,0,0)=(1,2,0)$.

שאלה מס' 7 : (5 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימת $\det(A)=1$ אזי $\det\left(A^{-1}+adj(A)\right)$ שווה ל:

א. 2 ; ב. 1 ; ג. 2^n ; ד. $\frac{1}{2}$; ה. $\frac{1}{2^n}$

שאלה מס' 8 : (5 נקודות)

יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. נתון כי $A-I$ לא הפיכה וגם A דומה ל- $B+I$ אזי:

א. B לא לכסינה.

ב. $rank(A)=rank(B)$.

ג. A דומה ל- B.

ד. B לא הפיכה.

ה. $A-I$ דומה ל- $B-I$.

דף ריק למקרה הצורך